A TÖBBSZÖRÖSEN TÖKÉLETES SZÁMOKRÓL

Írta: SZÉP JENŐ

Jelöljük az n (egész) szám osztóinak összegét $\sigma(n)$-nel. ahol az osztók közé számítjuk az 1-et és magát n-et is. Ismeretes, hogy ha $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$ $(p_1, p_2, \ldots, p_m$ különböző primszámok), akkor

$$\sigma(n)=\prod_{i=1}^{m}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}. \tag{1}$$

Pl. $\sigma(10)=\sigma(2\cdot5)=18$, $\sigma(60)=\sigma(2^2\cdot3\cdot5)=168$. Vannak olyan számok, amelyek osztóinak összege a szám kétszerese, pl. $\sigma(6)=12$, $\sigma(28)=56$.

Az olyan számot, amelyre

$$\sigma(n)=2(n) \tag{2}$$

EUKLIDES *tökéletes számnak* nevezte (EUKLIDES VII könyve 22. definíció: tökéletes szám az olyan, amely a részeinek összegével egyenlő. „Rész"-en itt EUKLIDES osztót ért, magát a számot nem számítja az osztók közé).

EUKLIDES igazolja, *hogy ha* 2^k-1 *törzsszám, akkor*

$$n=2^{k-1}(2^k-1) \tag{3}$$

szám tökéletes szám.

EULER bebizonyította, hogy *megfordítva, minden páros tökéletes szám* (3) *alakú.*

Mind máig nincsen azonban eldöntve, hogy a) véges sok, vagy végtelen sok páros tökéletes szám van e? b) van e páratlan tökéletes szám? Az első kérdés azzal függ össze, hogy véges, vagy végtelen sok 2^k-1 alakú törzsszám van e? Azt tudjuk, hogy ha 2^k-1 törzsszám, akkor k maga is törzsszám. Ez megfordítva nem igaz pl. az első k törzsszám, amelyre 2^k-1 nem törzsszám $k=11$, ugyanis $2^{11}-1=2047=23\cdot89$. Tudjuk pl. hogy $k=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127$ értékekre 2^k-1 törzsszám.

*Többszörösen, $s-1$-szeresen tökéletes szám*nak nevezzük az olyan számot, amelyre

$$\sigma(n)=sn, \tag{4}$$

ahol s egész szám. $s=2$ esetén (4) a tökéletes számok definícióját adja $s=3$-ra példát szolgáltat $n=120=2^3\cdot3\cdot5$, $\sigma(120)=360=3\cdot120$.

A többszörösen tökéletes számokról még nagyon keveset tudunk, még kevesebbet a páratlan többszörösen tökéletes számokról. A többszörösen tökéletes számokban előforduló törzsszámokra azonban bizonyos becsléseket tehetünk.

Ha $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ páros tökéletes szám, akkor fennáll

$$(5) \qquad 2 < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1} \leqq 3$$

Ez (2) és (3) felhasználásával könnyen igazolható.

De az is igazolható, hogy ha n páratlan tökéletes számot jelent, akkor érvényes

$$(6) \qquad 2 < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1} < 2\sqrt[3]{2}.$$

Ennek elemi bizonyítása megtalálható: Mat. Lapok, IV, (1953), 139 o. Az ott követett eljárást fogjuk most alkalmazni többszörösen tökéletes számok esetére és igazoljuk, hogy *ha*

$$\sigma(n) = sn \qquad (n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}),$$

akkor páros n esetén

$$(7) \qquad s < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1} < s\sqrt[7]{s^5},$$

páratlan n esetén pedig az erősebb

$$(8) \qquad s < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1} < s\sqrt{s}$$

egyenlőtlenség érvényes.

A (7) és (8) egyenlőtlenség első fele egyszerűen adódik abból, hogy $s p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$, tehát

$$s = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)} < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

(7) második felének igazolásához először megmutatjuk, hogy fennáll

$$(9) \qquad \frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha+1} - 1} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^{\alpha}(p-1)},$$

azaz fennáll

$$(10) \qquad \frac{p^{2\alpha+1}(p-1)}{(p^{\alpha+1} - 1)^2} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

Ha $p \geqq 2$, akkor

$$(11) \qquad \frac{p^{2\alpha+1}(p-1)}{(p^{\alpha+1}-1)^2} \left(= \frac{p-1}{p-\frac{2}{p^\alpha}+\frac{1}{p^{2\alpha+1}}} \right)$$

$\alpha = 1$ esetén veszi fel legnagyobb értékét. Azt kell tehát csak igazolni, hogy

$$(12) \qquad \frac{p^3(p-1)}{(p^2-1)^2} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{6}}$$

fennáll. (12)-ből kis átalakítással nyerjük a

$$(13) \qquad \left(1+\frac{1}{p-1}\right)^7 < \left(1+\frac{1}{p}\right)^{12} \qquad (p \geqq 2)$$

egyenlőtlenséget, amelynek helyességét a binóm tétel felhasználásával és az egyenlőtlenség két oldalán szereplő tagok összehasonlításával egyszerűen beláthatjuk.

Most már (7) igazolása (9) felhasználásával a következőképpen történik:

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i-1} = \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)} \cdot \frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i^{\alpha_i+1}-1} <$$

$$< \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)} \left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)^{\frac{1}{6}} = s^2 \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)^{\frac{1}{6}}$$

ebből

$$\left(\prod \frac{p_i}{p_i-1}\right)^{\frac{7}{6}} < s^2$$

adódik, amiből (7) közvetlenül leolvasható.

(8) második felének igazolásához előbb a

$$(14) \qquad \frac{p^{\alpha+1}}{p^{\alpha+1}-1} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha(p-1)} \qquad (p \geqq 3)$$

egyenlőtlenséget igazoljuk.

Minthogy

$$\frac{p^{2\alpha+1}(p-1)}{(p^{\alpha+1}-1)^2} = \frac{p-1}{p-\frac{2}{p^\alpha}+\frac{1}{p^{2\alpha+1}}} < \frac{p-1}{p-\frac{2}{p^\alpha}},$$

ezért a

$$(15) \qquad \frac{p-1}{p-\frac{2}{p^\alpha}} < \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

egyenlőtlenség fennállásából már következik (14).

Minthogy $\dfrac{p-1}{p-\dfrac{2}{p^{\alpha}}}$ legnagyobb értékét $\alpha=1$ esetén veszi fel, továbbá egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\frac{p-1}{p-\dfrac{2}{p}}<\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}$$

egyenlőtlenség fennáll és így (14) is, ezért most (az előbbihez hasonlóan) már igazolhatjuk a (8) egyenlőtlenség második részét:

$$\prod_{i=1}^{m}\frac{p_i}{p_i-1}=\prod\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)}\,\frac{p_i^{\alpha_i+1}}{p_i^{\alpha_i+1}-1}<$$

$$<\prod\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)}\,\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i^{\alpha_i}(p_i-1)}\left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)^{\frac{1}{3}}=s^2\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ebből pedig (8) azonnal leolvasható.

Természetesen a (7) és (8) egyenlőtlenségek még nem a legjobbak, tehát az általánosság megszorítása nélkül tovább finomíthatók. Ehhez nem kell mást tenni, mint a fenti $\frac{1}{6}$ ill. $\frac{1}{3}$ kitevőket javítani. Az egyenlőtlenségek még tovább is javíthatók, ha pl. s-re, vagy n-re bizonyos feltételeket szabunk ki. Pl. n legyen páratlan és $s>3$ törzsszám.

Minthogy a szükséges számítások az elmondottak mintájára elemi úton elvégezhetők, ezért ezek a kérdések jól felhasználhatók a főiskolákon is matematikai szemináriumi anyagként.

A többszörösen tökéletes számokra vonatkozólag legújabban HANS-JOACHIM KANOLD-nak jelent meg két érdekes dolgozata, amelyek a kérdéssel lényegében elemi úton foglalkoznak: Über mehrfach vollkommenen Zahlen I, *Journal für die reine und angew. Math.*, 194, (1955), 218—220 és II, u. ott 197, (1957), 82—96.

О МНОГОКРАТНО СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЛАХ

Йене Сеп

Число n многократно ($s-1$ кратно) называем совершенным, если

$$\sigma(n)=sn \qquad (s>1 \text{ целое число})$$

действительно, где $\sigma(n)$ обозначает итог делителей числа n.

Удостоверяем следующие две неровности:

а) если $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1,p_2,\ldots,p_m$ разные первоначальные числа) многократно совершенное число, тогда действительно

$$s<\prod_{i=1}^{m}\frac{p_i}{p_i-1}<s\sqrt[7]{s^5}.$$

б) если n непарное многократно совершенное число, тогда действительно

$$s < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i-1} s\sqrt{s}.$$

Примененным методом можно также дальше исправлять вышеприведенные неровности.

ÜBER DIE MEHRFACH VOLLKOMMENEN ZAHLEN

Von J. Szép

Man nennt eine ganze Zahl n mehrfach ($s-1$ fach) vollkommen, wenn für die Summe der Teiler $\sigma(n)$ von n

$$\sigma(n) = sn \qquad (s > 1 \text{ ist ganz})$$

gilt. (Ist $s=2$, so ist n vollkommen).

Es werden die folgenden Ungleichungen elementarweise bewiesen:

a) *Ist* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_m$ *sind verschiedene Primzahlen) eine mehrfach* ($s-1$ *fach) vollkommene Zahl, so gilt*

$$s < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i-1} < s\sqrt[7]{s^5},$$

b) *Ist n eine ungerade mehrfach volkommene Zahl, so gilt*

$$s < \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i}{p_i-1} < s\sqrt{s}.$$

Es ist möglich aber mit der angewandten Methode die obigen zwei Ungleichungen noch weiter zu verfeinern.